6Л

УДК 007:681.516.4

А.О. Лозинський, Л.І. Демків
Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна
lozynsky@polynet.lviv.ua; demkivl@gmail.com

Аналіз стійкості систем з регулятором Такагі-Сугено

Розглянуто нелінійну динамічну систему n-го порядку, для якої побудовано нечіткий регулятор типу Такагі-Сугено. Досліджено стійкість за Ляпуновим такої, лінеаризованої в кількох точках, системи.

Вступ

Аналіз та синтез систем керування електромеханічними системами технологічних об’єктів нерозривно пов’язаний із забезпеченням відповідних динамічних характеристик. У деяких випадках для розв’язування поставленої задачі достатнім є застосування класичного апарату синтезу лінійних систем. Проте отримані в результаті синтезу закони керування для систем з яскраво вираженими нелінійностями відповідають умовам, закладеним в основу синтезу, тільки при роботі системи в області малих відхилень від точки, для якої синтезовано керування. У такому випадку для підвищення якісних характеристик керованих електромеханічних систем доцільним є формування нелінійних законів керування, що отримуються в результаті застосування синтезу нелінійних систем, зокрема, систем з нечітким регулятором. При цьому отримуємо систему «нелінійний регулятор – нелінійний об’єкт», для якої необхідно проводити аналіз її стійкості.

Останнім часом саме дослідження, пов’язані з аналізом стійкості нечітких систем автоматизованого керування, набули значного поширення. Зокрема, в [1] розглянуто нелінійну динамічну систему n-го порядку, для якої, використовуючи метод Ляпунова, побудовано стійку нечітку систему керування. В роботі [2] сформовано матричні нерівності, при виконанні яких забезпечується стійкість системи з ТС-регулятором. Дослідженням стійкості за Ляпуновим займалися також Y. Chang, S. Chen, S. Su, T. Lee, J. Andujar, J.M. Bravo, A. Peregrin, X. Liu, S. Zhong [3-6].

У загальному випадку при дослідженні стійкості динамічних систем не можна вказати універсальний спосіб вибору функції Ляпунова. Наприклад, в [7] функцію Ляпунова вибирають рівною криволінійному інтеграла від додатно визначених симетричних матриць, у роботі [8] при побудові функції Ляпунова використовувались ідеї так званого LMI підходу.

Метою даної роботи є дослідження стійкості за Ляпуновим модельної системи з регулятором ТС.

Побудова системи з ТС-регулятором

Розглянемо нелінійну систему, яка в загальному випадку описується диференціальним рівнянням n-го порядку. Її можна звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\bar{x}'(t) = f(\bar{x}(t)) + g(\bar{x}(t))\bar{u}(t) + \xi(t),$$

де $\bar{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)]^T$, $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t)$, $\bar{u}(t)$ – вектор керуючих впливів, $\bar{\xi}(t)$ – зовнішні збурюючі впливи, $f(\bar{x}(t))$ та $g(\bar{x}(t))$ – нелінійні функції, описані в області робочих точок системи. Цю систему, нехтуючи зовнішніми збуреннями та вико-

ристовуючи перший доданок розкладу в ряді Тейлора правої частини, лінеаризовано в кількох точках, що дає можливість записати її таким чином:

$$\Delta\dot{\bar{x}}(t) = A^{*}\Delta\bar{x}(t) + B^{*}\Delta\bar{u}(t),$$

де $\Delta\bar{x}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)$, $\Delta\bar{u}(t) = \bar{u}(t) - \bar{u}_0(t)$, $\bar{x}_0(t), \bar{u}_0(t)$ – вектори, в околі яких розкладаємо в ряд Тейлора, $A^{*} = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n} = \frac{\Delta f_i}{\Delta x_j}$, $B^{*} = \left(b_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n} = \frac{\Delta g_i}{\Delta x_j}$. У результаті отримано лінійну модель зі змінними параметрами. Робочу область розбито на n підобластей, а загальну модель нелінійної системи утворено набором n нечітких правил виду

$$R^{i}: \quad IF \quad x_1 \in M_1^i \; i \; x_2 \in M_2^i \; i \ldots x_n \in M_n^i \quad THEN$$
$$\dot{\bar{x}}(t) = A_i\bar{x}(t) + B_i\bar{u}(t),$$
$$IF \quad x_1 \in N_1^i \; i \; x_2 \in N_2^i \; i \ldots x_n \in N_n^i \quad THEN$$
$$\bar{u}(t) = K_i\bar{x}(t), \qquad i = \overline{1,k},$$

де R^i – i-е правило, $M_j^i, N_j^i, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n}$ – області розбиття, $A_i, B_i, K_i \in R^{n\times n}$ – матриці, що формують модель системи в околі певної робочої точки (локальна модель), $\bar{u}(t) \in R^n$ – вектор керуючих впливів.

Використовуючи дефазифікацію, гравітаційним методом отримаємо таку модель системи:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i(\bar{x})\left(A_i + B_i \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\bar{x}) K_j\right)\bar{x}(t), \tag{1}$$

де $\nu_i = \nu_i(\bar{x}) = \frac{\prod_{j=1}^{n} M_j^i(x_j(t))}{\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} M_j^i(x_j(t))}$, $\mu_i = \mu_i(\bar{x}) = \frac{\prod_{j=1}^{n} N_j^i(x_j(t))}{\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} N_j^i(x_j(t))}$, $M_j^i(x_j(t))$, $N_j^i(x_j(t))$ – функції належності $x_j(t)$ до відповідної області M_j^i чи N_j^i, $\sum_{i=1}^{k}\nu_i = 1$, $\sum_{i=1}^{k}\mu_i = 1$.

Тобто модель i-ої системи матиме вигляд

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A_i + B_iK_i)\bar{x}(t). \tag{2}$$

Нехай кожна з таких систем буде асимптотично стійкою за Ляпуновим, тобто для кожної з них виконується

$$(A_i + B_iK_i)^T P_i + P_i(A_i + B_iK_i) = -Q_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{3}$$

де P_i – розв’язок рівняння Ляпунова (2) $Q_i = Q_i^T > 0, P_i = P_i^T > 0$.

Проведемо деякі перетворення системи (1):

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i(A_i + B_iK_i)\bar{x}(t) + \sum_{i=1}^{k}\nu_i B_i\left(\sum_{j=1}^{k}\mu_j K_j - K_i\right)\bar{x}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}\left(t\right) + \sum_{i=1}^{k} \nu_i B_i \left(\sum_{j=1}^{k} \mu_j K_j - \sum_{j=1}^{k} \mu_j K_i \right) \overline{x}\left(t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}\left(t\right) + \sum_{i=1}^{k} \nu_i B_i \left(\sum_{j=1}^{k} \mu_j \left(K_j - K_i \right) \right) \overline{x}\left(t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}\left(t\right) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \nu_i B_i \mu_j \left(K_j - K_i \right) \overline{x}\left(t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}\left(t\right) + \sum_{j=1}^{k} \nu_1 B_1 \mu_j \left(K_j - K_1 \right) \overline{x}\left(t\right) + \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{k} \nu_i B_i \mu_j \left(K_j - K_i \right) \overline{x}\left(t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}\left(t\right) + \sum_{j=1}^{k} \nu_1 B_1 \mu_j \left(K_j - K_1 \right) \overline{x}\left(t\right) + \sum_{i=2}^{k} \nu_i B_i \mu_1 \left(K_1 - K_i \right) \overline{x}\left(t\right) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=2}^{k} \nu_i B_i \mu_j \left(K_j - K_i \right) \overline{x}\left(t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}(t) - \sum_{i=2}^{k} \left(K_i - K_1 \right) \left(\nu_1 \mu_i B_1 - \nu_i \mu_1 B_i \right) \overline{x}(t) + \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=2}^{k} \nu_i B_i \mu_j \left(K_j - K_i \right) \overline{x}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}(t) - \sum_{i=2}^{k} \left(K_i - K_1 \right) \left(\nu_1 \mu_i B_1 - \nu_i \mu_1 B_i \right) \overline{x}(t) + \sum_{j=2}^{k} \nu_1 B_1 \mu_j \left(K_j - K_2 \right) \overline{x}(t) +$$

$$+ \sum_{i=3}^{k} \sum_{j=2}^{k} \nu_i B_i \mu_j \left(K_j - K_i \right) \overline{x}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}(t) - \sum_{i=2}^{k} \left(K_i - K_1 \right) \left(\nu_1 \mu_i B_1 - \nu_i \mu_1 B_i \right) \overline{x}(t) + \sum_{i=2}^{k} \nu_2 B_2 \mu_i \left(K_i - K_2 \right) \overline{x}(t) +$$

$$+ \sum_{i=3}^{k} \nu_i B_i \mu_2 \left(K_2 - K_i \right) \overline{x}(t) + \sum_{i=3}^{k} \sum_{j=3}^{k} \nu_i B_i \mu_j \left(K_j - K_i \right) \overline{x}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}(t) - \sum_{i=2}^{k} \left(K_i - K_1 \right) \left(\nu_1 \mu_i B_1 - \nu_i \mu_1 B_i \right) \overline{x}(t) -$$

$$- \sum_{i=3}^{k} \left(K_i - K_2 \right) \left(\nu_2 \mu_i B_2 - \nu_i \mu_2 B_i \right) \overline{x}(t) + \sum_{i=3}^{k} \sum_{j=3}^{k} \nu_i B_i \mu_j \left(K_j - K_i \right) \overline{x}(t).$$

Використовуючи такі ж міркування, можна отримати:

$$\dot{\overline{x}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i \left(A_i + B_i K_i \right) \overline{x}(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j+1}^{k} \left(K_i - K_j \right) \left(\nu_j \mu_i B_j - \nu_i \mu_j B_i \right) \overline{x}(t). \qquad (4)$$

Основний результат

Надалі будемо користуватись означенням несиметричної додатно визначеної матриці [9]: дійсна матриця називається додатно визначеною, якщо $\left(Dz, z\right) > 0,\ \forall z \in R^n,\ z \neq 0$ або, що еквівалентно, $z^T D z > 0,\ \forall z \in R^n, z \neq 0$. Аналогічно вводять поняття несиметричної від’ємно визначеної матриці. Якщо, крім того, D симетрична, то будемо називати її симетричною додатно визначеною матрицею. Властивості таких матриць широко розглянуті, зокрема, в [10], [11].

Перш ніж приступити до знаходження функції Ляпунова V для системи (1), доведемо такі твердження:

Лема 1. Якщо матриці $Z, R, C, D \in R^{n \times n}$ *і* $Z = Z^T > 0,\ R = R^T > 0,\ C < 0,\ D < 0$, то

а) $C + D < 0$;

б) $Z \cdot R > 0$;

в) $C \cdot Z < 0$;

г) $Z \cdot C < 0$;

д) $C^T < 0$.

Доведення. Нехай $\bar{z} \in R^n$ – довільний вектор, тоді

а) $\bar{z}^T (C + D)\bar{z} = \bar{z}^T C\bar{z} + \bar{z}^T D\bar{z} < 0$, тому $C + D < 0$;

б) оскільки $Z = Z^T$ і $Z > 0$, то (див. [10]) $0 < \lambda_{\min}(Z)E \le Z \le \lambda_{\max}(Z)E$, де $\lambda_{\min}(Z),\ \lambda_{\max}(Z)$ мінімальне та максимальне значення матриці Z відповідно, E – одинична матриця. Тоді

$\bar{z}^T ZR\bar{z} \ge \bar{z}^T \lambda_{\min}(Z)ER\bar{z} \ge \lambda_{\min}(Z)\bar{z}^T R\bar{z} > 0$, що доводить пункт б) леми;

в) враховуючи, що якщо $a, b \in R^1,\ a > b > 0$, то $aC < bC$, то

$\bar{z}^T CZ\bar{z} \le \bar{z}^T C\lambda_{\min}(Z)E\bar{z} = \lambda_{\min}(Z)\bar{z}^T C\bar{z} < 0$. Тобто $CZ < 0$;

г) доводиться аналогічно пункту в);

д) $\bar{z}^T C^T \bar{z} = (C\bar{z})^T \bar{z}^{T^T} = \left(\bar{z}^T C\bar{z}\right)^T < 0$, що і слід було довести.

Лема 2. Якщо $Z, R, C \in R^{n \times n},\quad Z = Z^T > 0,\quad R = R^T > 0$ та справедлива рівність

$$C^T R + RC = -Z\ , \tag{5}$$

то $C < 0$.

Доведення. Ґрунтуючись на результатах леми 1, очевидно, що матриця C не може бути додатно визначеною та може бути від'ємно визначеною. Залишається показати, що вираз $\bar{z}^T C\bar{z}$ не може набувати різних знаків у залежності від значення вектора $\bar{z} \in R^n$.

З рівності (5) одержимо:

$$0 > -\bar{z}^T Z\bar{z} = \bar{z}^T C^T R\bar{z} + \bar{z}^T RC\bar{z} > \lambda_{\max}(R)\left(\bar{z}^T C^T \bar{z} + \bar{z}^T C\bar{z}\right).$$

Оскільки $\lambda_{\max}(R) > 0$, то $\bar{z}^T C^T \bar{z} + \bar{z}^T C\bar{z} < 0$. А оскільки з леми 1 випливає, що C та C^T мають однакові знаки, то $C < 0$, тобто $\nexists\ \bar{z} \in R^n : \bar{z}^T C\bar{z} > 0$.

Теорема. Якщо вибрати матриці $K_i, i = \overline{1, k}$ таким чином, що системи (2) стійкі за Ляпуновим та

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j+1}^{k} \left\{ \left[\left(K_i - K_j\right)\left(\nu_j \mu_i B_j - \nu_i \mu_j B_i\right) \right]^T P + P\left(K_j - K_i\right)\left(\nu_j \mu_i B_j - \nu_i \mu_j B_i\right) \right\} > -\sum_{i=1}^{k} \bar{Q}_i, \tag{6}$$

де $\overline{Q_i} > 0, i = \overline{1..k}$, матриця P пов'язана з усіма системами, $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$, то система (1) теж стійка за Ляпуновим.

Доведення. Запишемо функцію Ляпунова для системи (1) у вигляді

$$V = \bar{x}^T P\bar{x}\ ,$$

де $P>0$, а, отже, і $V>0$ (див. пункт б) леми). Тоді

$$\dot{V}=\dot{\bar{x}}^T P\bar{x}+\bar{x}^T P\dot{\bar{x}}=\bar{x}^T\left(\sum_{i=1}^{k}\nu_i\left(A_i+B_iK_i\right)^T-\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k}\left[\left(K_i-K_j\right)\left(\nu_j\mu_iB_j-\nu_i\mu_jB_i\right)\right]^T\right)P\bar{x}+$$

$$+\bar{x}^T P\left(\sum_{i=1}^{k}\nu_i\left(A_i+B_iK_i\right)-\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k}\left(K_i-K_j\right)\left(\nu_j\mu_iB_j-\nu_i\mu_jB_i\right)\right)\bar{x}=$$

$$=\bar{x}^T\left(\sum_{i=1}^{k}\nu_i\left[\left(A_i+B_iK_i\right)^T P+P\left(A_i+B_iK_i\right)\right]\right)\bar{x}-$$

$$-\bar{x}^T\left(\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}\left[\left(K_j-K_i\right)\left(\nu_j\mu_iB_j-\nu_i\mu_jB_i\right)\right]^T P+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k}P\left(K_i-K_j\right)\left(\nu_j\mu_iB_j-\nu_i\mu_jB_i\right)\right)\bar{x}.$$

Оскільки справедливою є рівність (3), то з леми 2 випливає, що $A_i+B_iK_i<0$, $i=\overline{1,k}$. Тоді, враховуючи результати леми 1 та те, що $\nu_i\in[0;1]$, $i=\overline{1,k}$ можна стверджувати, що вираз в перших дужках

$$\sum_{i=1}^{k}\nu_i\left[\left(A_i+B_iK_i\right)^T P+P\left(A_i+B_iK_i\right)\right]=-\sum_{i=1}^{k}\overline{Q_i},\quad \overline{Q_i}>0,\ i=\overline{1,k},$$

тобто для того, щоб $\dot{V}<0$ необхідно, щоб виконувалась нерівність (6).

Зауваження 1. Доведення теореми залишається справедливим, якщо замість P взяти довільну симетричну додатно визначену матрицю або добуток довільної кількості таких матриць.

Наслідок 1. Якщо вибрати матриці $K_i, i=\overline{1,k}$ таким чином, що системи (2) стійкі за Ляпуновим, $\nu_j\mu_i=\nu_i\mu_j$, $i,j=\overline{1,k}$ та $B_i=B$, $i=\overline{1,k}$, то система (1) стійка за Ляпуновим.

Доведення, очевидним чином, випливає з доведення теореми.

Література

1. Chaio-Shuing Chen, Wen-Liang Chen Analysis and design of a stable control system // Fuzzy Sets and Systems. – 1998. – № 96. – P. 21-35.
2. Tanaka K, Ikeda T., Wang H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based design // IEEE Transactions on Fuzy Systems. – 1998. – T. 6, № 2. – P. 250-265.
3. Chang Y., Chen S., Su S., Lee T. Static output feedback stabilization for nonlinear interval time-delay systems via fuzzy control approach // Fuzzy Sets and Systems. – 2004. – № 148. – P. 395-410.
4. Andujar J., Bravo J.M., Peregrin A. Stability analysis and syntesis of multivariable fuzzy systems using interval arichmetics // Fuzzy Sets and Systems. – 2004. – № 148. – P. 337-353.
5. Le Hung Lan Stability analysis for a class of Takagi-Sugeno fuzzy control systems with PID controlers // Int. J. of Approximate Reasoning. – 2007. – № 46. – P. 109-119.
6. Liu X., Zhong S. T-S fuzzy model-based impulsive control of chaotic systems with exponential decay rate // Physics Letters A. – 2007. – № 370. – P. 260-264.
7. Rhee B., Won S. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design // Fuzzy Sets and Systems. – 2006. – № 157. – P. 1211-1228.
8. K. Tanaka, H. Ohtake, H. Wang A descraptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov function // IEEE Transactions on Fuzy Systems. – 2007. – T. 15, № 3. – P. 333-341.
9. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. – SIAM, 2003. – 528 p.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
11. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.

А.О. Лозинский, Л.И. Демкив

Анализ устойчивости систем с регулятором Такаги-Сугено

В статье рассмотрена нелинейная динамическая система n-го порядка, для которой построено нечёткий регулятор типа Такаги-Сугено. По Ляпунову исследовано устойчивость такой, линеаризованной в нескольких точках, системы.

Стаття надійшла до редакції 01.07.2008.